УДК 621.77

Михалевич В. М.
Краевский В. А.

ПОИСК РЕШЕНИЯ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ ПРИ ГОРЯЧЕМ ДЕФОРМИРОВАНИИ

В работах [1–3] отмечается, что максимально возможная деформация до разрушения, которую воспринимает материал при горячем деформировании, зависит от скорости деформирования. Для использования этого свойства с целью интенсификации процесса горячего деформирования в работе [4] на основе скалярной модели накопления повреждений при горячем деформировании:

$$\psi(t)=\int_0^t \varphi(t-\tau;I(\tau))\cdot f(\dot{\varepsilon}_u(\tau))\cdot d\tau\,, \tag{1}$$

где $0\le\psi\le 1$, $\psi(0)=0$, $\psi(t_*)=1$; t_* – предельное время, соответствующее разрушению образца; t,τ – время; $\varphi(t-\tau,I(\tau))$ – ядро наследственности; f – некоторая функция) и с учетом зависимости накопленной деформации ε_u от скорости деформации $\dot{\varepsilon}_u$:

$$\varepsilon_u(t)=\int_0^t \dot{\varepsilon}_u(\tau)\cdot d\tau \tag{2}$$

сформулирована вариационная задача: определить закон изменения скорости деформации $\dot{\varepsilon}_u=\dot{\varepsilon}_u(t)$, при котором за заданное время t_* материал приобретает наибольшую деформацию ε_* при условии исчерпания ресурса пластичности материала, то есть $\psi(t_*)=1$:

$$\begin{gathered}\varepsilon_*=\int_0^{t_*}\dot{\varepsilon}_u(\tau)\cdot d\tau\to\max,\\ \int_0^{t_*}\varphi(t-\tau;I(\tau))\cdot f(\dot{\varepsilon}_u(\tau))\cdot d\tau=1.\end{gathered} \tag{3}$$

Целью работы является поиск решения вариационной задачи (3).

Задача (3) – это классическая задача изопериметрического типа. Ее решение сводится к отысканию оптимума функционала [5]:

$$\varepsilon_*(\dot{\varepsilon}_u(t))=\int_0^{t_*}\left(\dot{\varepsilon}_u(t)+\lambda\left((t_*-\tau)^{n-1}\dot{\varepsilon}_u(t)\right)\right)d\tau\to\max\,, \tag{4}$$

возможные значения которого определяются решением уравнение Эйлера:

$$\lambda=-(t_*-\tau)^{1-n}=const\,. \tag{5}$$

Уравнение (5) имеет решение только при $n=1$. Данный случай тривиален, поскольку при этом модель наследственного типа (1) вырождается в линейный принцип суммирования повреждений, который, как известно [1], не описывает эффекты, связанные с влиянием на предельную накопленную деформацию закономерностей изменения скорости деформаций. В тоже время из уравнения (5) следует, что при $n\ne 1$ решения уравнения Эйлера (5) не существует, а это, в свою очередь, означает, что и вариационная задача в постановке (3), также не имеет решения. Такая ситуация возникла потому, что в (3) не учтено важное условие, которое из физических представлений об исследуемом процессе, учитывает то, что разрушение материала не может произойти до времени t_*, т. е.:

$$\int_0^t \varphi\left(t-\tau; I(\tau)\right)\cdot f\left(\dot{\varepsilon}_u(\tau)\right)\cdot d\tau \le 1,\ \forall t \in \left(0, t_*\right). \tag{6}$$

Решить задачу (3) с учетом (6) не удалось в связи с тем, что (6) эквивалентно бесконечному количеству условий, которые формируют граничную поверхность возможных значений задачи (3). Поэтому решено было упростить задачу и искать решение (3) для класса кусочно-постоянных функций. В этой работе рассмотрены двух- и трехступенчатая схемы деформирования.

Для двухступенчатой схемы:

$$\dot{\varepsilon}_u(t) = \begin{cases} \dot{\varepsilon}_{u1}, 0 \le t \le t_1; \\ \dot{\varepsilon}_{u2}, t_1 < t \le t_*. \end{cases} \tag{7}$$

Задача (3) с учетом (6) сведена к задаче нелинейного программирования:

$$\begin{aligned} &\varepsilon_* = \dot{\varepsilon}_{u1}\cdot t_1 + \dot{\varepsilon}_{u2}\cdot\left(t_* - t_1\right) \to \max; \\ &\left(\frac{t_*}{t_{*1}}\right)^n + \left(\frac{t_* - t_1}{t_{*2}}\right)^n - \left(\frac{t_* - t_1}{t_{*1}}\right)^n = 1, \\ &t_1 \le t_{*1}, \end{aligned} \tag{8}$$

в которой целевая функция зависит от трех неизвестных $\dot{\varepsilon}_{u1}, \dot{\varepsilon}_{u2}, t_1$, где:

$$t_{*i} = t_{*c}\left(\dot{\varepsilon}_{ui}\right), \tag{9}$$

где t_{*c} – известная функция, которая характеризует свойства материала.

Второе уравнение (8) с учетом (9) запишем в виде:

$$\dot{\varepsilon}_{u1}\left[t_*^n - \left(t_* - t_1\right)^n\right] + \dot{\varepsilon}_{u2}\left(t_* - t_1\right)^n - \gamma^n = 0\,. \tag{10}$$

Найдем условные экстремумы целевой функции (8) при условии (10). С помощью метода множителей Лагранжа для этой цели составлена вспомогательная функция:

$$F\left(\dot{\varepsilon}_{u1}, \dot{\varepsilon}_{u2}, t_1, \lambda\right) = \dot{\varepsilon}_{u1}\cdot t_1 + \dot{\varepsilon}_{u2}\cdot\left(t_* - t_1\right) + \lambda\left[\dot{\varepsilon}_{u1}\left(t_*^n - \left(t_* - t_1\right)^n\right) + \dot{\varepsilon}_{u2}\left(t_* - t_1\right)^n - \gamma^n\right]. \tag{11}$$

Тогда необходимое условие существования условного экстремума запишется в виде:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial \dot{\varepsilon}_{u1}} = t_1 + \lambda\left[t_*^n - \left(t_* - t_1\right)^n\right] = 0; \\ \dfrac{\partial F}{\partial \dot{\varepsilon}_{u2}} = t_* - t_1 + \lambda\left(t_* - t_1\right)^n = 0; \\ \dfrac{\partial F}{\partial t_1} = \left(\dot{\varepsilon}_{u1} - \dot{\varepsilon}_{u2}\right)\left(\lambda n\left(t_* - t_1\right)^{n-1} + 1\right) = 0; \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = \dot{\varepsilon}_{u1}\left(t_*^n - \left(t_* - t_1\right)^n\right) + \left(t_* - t_1\right)^n - \gamma^n = 0. \end{cases} \tag{12}$$

В результате получили такие критические точки:

$$\lambda = -t_*^{1-n}; t_1 = 0; \dot{\varepsilon}_{u1} = \dot{\varepsilon}_{u2} = \left(\frac{\gamma}{t_*}\right)^n; \tag{13}$$

$$\lambda = -t_*^{1-n}; t_1 = t_*; \dot{\varepsilon}_{u1} = \dot{\varepsilon}_{u2} = \left(\frac{\gamma}{t_*}\right)^n. \tag{14}$$

Обе критические точки соответствуют режиму деформирования с постоянной скоростью, что согласно анализу, проведенного в работе [4] не является оптимальной схемой.

Максимальное значение целевой функции (8) возможно также на границе области, которая определяется третьим неравенством (8):

$$t_1 = t_{*1} = \gamma \dot{\varepsilon}_{u1}^{-\frac{1}{n}}. \tag{15}$$

Учитывая, что при этом:

$$\dot{\varepsilon}_{u2} = \frac{\gamma^n - \dot{\varepsilon}_{u1}\left[t_*^n - \left(t_* - \gamma \dot{\varepsilon}_{u1}^{-\frac{1}{n}}\right)^n\right]}{\left(t_* - \gamma \dot{\varepsilon}_{u1}^{-\frac{1}{n}}\right)^n}, \tag{16}$$

сводим задачу к поиску экстремума функции одного переменного:

$$\varepsilon_*\left(\dot{\varepsilon}_{u1}\right) = \gamma \dot{\varepsilon}_{u1}^{1-\frac{1}{n}} + \left[\gamma^n - \dot{\varepsilon}_{u1}\left(t_*^n - \left(t_* - \gamma \dot{\varepsilon}_{u1}^{-\frac{1}{n}}\right)^n\right)\right] \cdot \left(t_* - \gamma \dot{\varepsilon}_{u1}^{-\frac{1}{n}}\right). \tag{17}$$

В результате искомое решение задачи (8) определяется из системы:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{d\dot{\varepsilon}_{u1}}\left\{\gamma \dot{\varepsilon}_{u1}^{1-\frac{1}{n}} + \left[\gamma^n - \dot{\varepsilon}_{u1}\left(t_*^n - \left(t_* - \gamma \dot{\varepsilon}_{u1}^{-\frac{1}{n}}\right)^n\right)\right] \cdot \left(t_* - \gamma \dot{\varepsilon}_{u1}^{-\frac{1}{n}}\right)^{1-n}\right\} = 0; \\ \dot{\varepsilon}_{u2} = \dfrac{\gamma^n - \dot{\varepsilon}_{u1}\left[t_*^n - \left(t_* - \gamma \dot{\varepsilon}_{u1}^{-\frac{1}{n}}\right)^n\right]}{\left(t_* - \gamma \dot{\varepsilon}_{u1}^{-\frac{1}{n}}\right)^n}; \\ t_1 = \gamma \dot{\varepsilon}_{u1}^{-\frac{1}{n}}. \end{cases} \tag{18}$$

Рассмотрим трехступенчатое деформирование:

$$\dot{\varepsilon}_u = \begin{cases} \dot{\varepsilon}_{u1}, \ 0 \le t \le t_1; \\ \dot{\varepsilon}_{u2}, \ t_1 \le t \le t_2; \\ \dot{\varepsilon}_{u3}, \ t_2 \le t \le t_*. \end{cases} \tag{19}$$

Тогда вариационную задачу (3) с учетом условия (6) можем записать в следующем виде:

$$\varepsilon_* = \dot{\varepsilon}_{u1}t_1 + \dot{\varepsilon}_{u2}(t_2 - t_1) + \dot{\varepsilon}_{u3}(t_* - t_2) \to \max,$$
$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_{u1}t_*^n - \dot{\varepsilon}_{u1}(t_* - t_1)^n + \dot{\varepsilon}_{u2}(t_* - t_1)^n - \dot{\varepsilon}_{u2}(t_* - t_2)^n + \dot{\varepsilon}_{u3}(t_* - t_2)^n - \gamma^n = 0; \\ -\dot{\varepsilon}_{u1}(t_2 - t_1)^n + \dot{\varepsilon}_{u1}t_2^n + \dot{\varepsilon}_{u2}(t_2 - t_1)^n - \gamma^n < 0; \\ t_1 < \gamma\dot{\varepsilon}_{u1}^{-\frac{1}{n}}, \end{cases} \tag{20}$$

где целевая функция ε_* зависит от пяти переменных $\dot{\varepsilon}_{u1}$, $\dot{\varepsilon}_{u2}$, $\dot{\varepsilon}_{u3}$, t_1, t_2.

Используем вышеописанный алгоритм, который разработан применительно к двухступенчатой схеме. Таким образом, оптимальное значение может находиться или в критических точках, которые находятся в середине области допустимых значений, определяемой неравенствами системы (20):

$$F_1(\dot{\varepsilon}_{u1}, \dot{\varepsilon}_{u2}, t_1, t_2) = \dot{\varepsilon}_{u1}t_1 + \dot{\varepsilon}_{u2}(t_2 - t_1) + \\ + \frac{\dot{\varepsilon}_{u1}(t_* - t_1)^n - \dot{\varepsilon}_{u1}t_*^n + \dot{\varepsilon}_{u2}(t_* - t_2)^n - \dot{\varepsilon}_{u2}(t_* - t_1)^n + \gamma^n}{(t_* - t_2)^{n-1}}, \tag{21}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_1}{\partial \dot{\varepsilon}_{u1}} = 0;\ \dfrac{\partial F_1}{\partial \dot{\varepsilon}_{u2}} = 0;\ \dfrac{\partial F_1}{\partial t_1} = 0;\ \dfrac{\partial F_1}{\partial t_2} = 0; \\ -\dot{\varepsilon}_{u1}(t_2 - t_1)^n + \dot{\varepsilon}_{u1}t_2^n + \dot{\varepsilon}_{u2}(t_2 - t_1)^n - \gamma^n < 0; \\ t_1 < \gamma\dot{\varepsilon}_{u1}^{-\frac{1}{n}}; \\ \dot{\varepsilon}_{u3} = \dfrac{\dot{\varepsilon}_{u1}(t_* - t_1)^n - \dot{\varepsilon}_{u1}t_*^n + \dot{\varepsilon}_{u2}(t_* - t_2)^n - \dot{\varepsilon}_{u2}(t_* - t_1)^n + \gamma^n}{(t_* - t_2)^n}, \end{cases} \tag{22}$$

или на границе этой области, то есть при значениях неизвестных, которые являются решениями систем (24), (26), (28):

$$F_2(\dot{\varepsilon}_{u1}, \dot{\varepsilon}_{u2}, t_2) = \gamma\dot{\varepsilon}_{u1}^{1-\frac{1}{n}} + \dot{\varepsilon}_{u2}\cdot\rho(t_2) + \\ + \frac{\dot{\varepsilon}_{u1}\cdot\rho(t_*)^n - \dot{\varepsilon}_{u1}t_*^n + \dot{\varepsilon}_{u2}(t_* - t_2)^n - \dot{\varepsilon}_{u2}\cdot\rho(t_*)^n + \gamma^n}{(t_* - t_2)^{n-1}}, \tag{23}$$

$$\rho(t) = t - \gamma\dot{\varepsilon}_{u1}^{-\frac{1}{n}};$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_2}{\partial \dot{\varepsilon}_{u1}} = 0;\ \dfrac{\partial F_2}{\partial \dot{\varepsilon}_{u2}} = 0;\ \dfrac{\partial F_2}{\partial t_2} = 0; \\ -\dot{\varepsilon}_{u1}(t_2 - t_1)^n + \dot{\varepsilon}_{u1}t_2^n + \dot{\varepsilon}_{u2}(t_2 - t_1)^n - \gamma^n < 0; \\ \dot{\varepsilon}_{u3} = \dfrac{\dot{\varepsilon}_{u1}(t_* - t_1)^n - \dot{\varepsilon}_{u1}t_*^n + \dot{\varepsilon}_{u2}(t_* - t_2)^n - \dot{\varepsilon}_{u2}(t_* - t_1)^n + \gamma^n}{(t_* - t_2)^n}; \\ t_1 = \gamma\dot{\varepsilon}_{u1}^{-\frac{1}{n}}, \end{cases} \tag{24}$$

$$F_3(\dot{\varepsilon}_{u1},t_1,t_2)=\dot{\varepsilon}_{u1}t_1+\frac{\gamma^n+\dot{\varepsilon}_{u1}(t_2-t_1)^n-\dot{\varepsilon}_{u1}t_2^n}{(t_2-t_1)^n}(t_2-t_1)+\frac{\dot{\varepsilon}_{u1}(t_*-t_1)^n-\dot{\varepsilon}_{u1}t_*^n+\gamma^n}{(t_*-t_2)^{n-1}}+$$
$$+\frac{(\gamma^n+\dot{\varepsilon}_{u1}(t_2-t_1)^n-\dot{\varepsilon}_{u1}t_2^n)(t_*-t_2)^n-(\gamma^n+\dot{\varepsilon}_{u1}(t_2-t_1)^n-\dot{\varepsilon}_{u1}t_2^n)(t_*-t_1)^n}{(t_*-t_2)^{n-1}(t_2-t_1)^n}, \quad (25)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_3}{\partial \dot{\varepsilon}_{u1}}=0; \quad \dfrac{\partial F_3}{\partial t_1}=0; \ \dfrac{\partial F_3}{\partial t_2}=0; \\ t_1<\gamma\dot{\varepsilon}_{u1}^{-\frac{1}{n}}; \\ \dot{\varepsilon}_{u2}=\dfrac{\gamma^n+\dot{\varepsilon}_{u1}(t_2-t_1)^n-\dot{\varepsilon}_{u1}t_2^n}{(t_2-t_1)^n}; \\ \dot{\varepsilon}_{u3}=\dfrac{\dot{\varepsilon}_{u1}(t_*-t_1)^n-\dot{\varepsilon}_{u1}t_*^n+\gamma^n}{(t_*-t_2)^n}+\dfrac{\gamma^n+\dot{\varepsilon}_{u1}(t_2-t_1)^n-\dot{\varepsilon}_{u1}t_2^n}{(t_2-t_1)^n}- \\ -\dfrac{\left(\gamma^n+\dot{\varepsilon}_{u1}(t_2-t_1)^n-\dot{\varepsilon}_{u1}t_2^n\right)(t_*-t_1)^n}{(t_2-t_1)^n(t_*-t_2)^n}, \end{cases} \quad (26)$$

$$F_4(\dot{\varepsilon}_{u1},t_2)=\gamma\dot{\varepsilon}_{u1}^{1-\frac{1}{n}}+\left(\gamma^n+\dot{\varepsilon}_{u1}\cdot\rho(t_2)^n-\dot{\varepsilon}_{u1}t_2^n\right)\cdot\rho(t_2)^{1-n}+$$
$$+\frac{\dot{\varepsilon}_{u1}\cdot\rho(t_*)^n-\dot{\varepsilon}_{u1}t_*^n+\gamma^n}{(t_*-t_2)^{n-1}}+\frac{(\gamma^n+\dot{\varepsilon}_{u1}\cdot\rho(t_2)^n-\dot{\varepsilon}_{u1}t_2^n)(t_*-t_2)}{\rho(t_2)^n}- \quad (27)$$
$$-\frac{(\gamma^n+\dot{\varepsilon}_{u1}\cdot\rho(t_2)^n-\dot{\varepsilon}_{u1}t_2^n)\cdot\rho(t_*)^n}{(t_*-t_2)^{n-1}\cdot\rho(t_2)^n},$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_4}{\partial \dot{\varepsilon}_{u1}}=0; \quad \dfrac{\partial F_4}{\partial t_2}=0; \quad t_1=\gamma\dot{\varepsilon}_{u1}^{-\frac{1}{n}}; \\ \dot{\varepsilon}_{u2}=\dfrac{\gamma^n+\dot{\varepsilon}_{u1}(t_2-t_1)^n-\dot{\varepsilon}_{u1}t_2^n}{(t_2-t_1)^n}; \\ \dot{\varepsilon}_{u3}=\dfrac{\dot{\varepsilon}_{u1}(t_*-t_1)^n-\dot{\varepsilon}_{u1}t_*^n+\gamma^n}{(t_*-t_2)^n}+\dfrac{\gamma^n+\dot{\varepsilon}_{u1}(t_2-t_1)^n-\dot{\varepsilon}_{u1}t_2^n}{(t_2-t_1)^n}- \\ -\dfrac{\left(\gamma^n+\dot{\varepsilon}_{u1}(t_2-t_1)^n-\dot{\varepsilon}_{u1}t_2^n\right)(t_*-t_1)^n}{(t_2-t_1)^n(t_*-t_2)^n}. \end{cases} \quad (28)$$

Решение системы (22), по аналогии с решением двухступенчатого деформирования (11), определяет класс процессов деформирования с постоянной скоростью, что не является оптимальной схемой деформирования. Поэтому для конкретного материала, который идентифицируется коэффициентами γ и n, необходимо найти решения трех систем (24), (26), (28) и среди них выбрать то, которое соответствует наибольшей деформации. Для определения оптимальных схем двухступенчатого и трехступенчатого деформирования разработаны MathCad и Maple программы.

Рассмотрим экспериментальные данные непрерывного кручения образцов из стали 14Х17Н2 при температуре 1150 °С [3]. При деформировании с постоянной скоростью максимальная деформация, которую может выдержать материал до разрушения $\varepsilon_*=1{,}8$.

При использовании двухступенчатой схемы деформирования, параметры которой определяются решением системы (18):

$$\dot{\varepsilon}_u(t) = \begin{cases} 0{,}4329\ c^{-1},\ 0 \le t \le 3{,}4268; \\ 0{,}0164\ c^{-1},\ 3{,}4268 < t \le 30, \end{cases} \tag{29}$$

получим деформацию $\varepsilon_* = 1{,}914$. Согласно расчетам наибольшая деформация при трехступенчатой схеме, определяется системой (22), решением которой получим:

$$\dot{\varepsilon}_u = \begin{cases} 1{,}59\ c^{-1},\ 0 \le t \le 0{,}821; \\ 0{,}048\ c^{-1},\ 0821 < t \le 9{,}713; \\ 0{,}01\ c^{-1},\ 9\ 713 < t \le 30. \end{cases} \tag{30}$$

Накопленная деформация при использовании схемы (30) $\varepsilon_* = 1{,}939$. Следует отметить, что эффект от оптимизации будет больше для материалов с ярко выраженной зависимостью граничных деформаций от скорости деформаций.

Полученные результаты показывают, что для двух- и трехступенчатого деформирования оптимальными являются схемы с понижением скорости деформирования. При этом с увеличением количества ступеней ε_* также увеличивается. Тогда, возможно, оптимальную схему мы получим при неограниченном возрастании количества ступеней, следовательно, существует закон изменения скорости деформации, который является решением задачи (3) с учетом условия (6), который описывается непрерывной функцией. Поиск этой функции и является предметом последующих исследований.

ВЫВОДЫ

Показано, что вариационная задача изопериметрического типа для модели накопления повреждений наследственного типа применительно к классу двух и трехступенчатого деформирования сводится к задаче нелинейного программирования. Получено решение задачи нелинейного программирования по определению оптимального закона изменения скорости деформации, при котором материал за фиксированное время получает наибольшую деформацию для случаев двух- и трехступенчатого изменения скоростей деформации. Отмечено, что оптимальными являются схемы с понижением скорости деформации. При этом увеличение количества ступеней приводит к увеличению предельной деформации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Михалевич В. М. Тензорні моделі накопичення пошкоджень / В. М. Михалевич. – Вінниця : «УНІВЕРСУМ- Вінниця», 1998. – 195 с.

2. Кривые текучести и пластичности стали ШХ15 при двукратном нагружении / А. М. Галкин, П. И. Полухин, С. П. Ефименко, В. Л. Пилюшенко // Изв. АН СССР. Металлы. – 1984. – № 6. – С. 185–188.

3. Богатов А. А. Влияние горячей прерывистой деформации на пластичность металла / А. А. Богатов, М. В. Смирнов, В. А. Криницын [и др.] // Изв. вузов. Черная металлургия. – 1981. – № 12. – С. 37–40.

4. Михалевич В. М. Формулювання варіаційної задачі для моделі накопичення пошкоджень при гарячому деформуванні / В. М. Михалевич, В. О. Раєвський // Обробка матеріалів тиском. Збірник наукових праць. – Краматорськ : ДДМА, 2009. – № 2(21). – С. 12–16.

5. Гельфанд И. М. Вариационное исчисление / И. М. Гельфанд, С. В. Фомин. – М. : Гос. издат. физ.-мат. лит., 1961. – 230 с.

Михалевич В. М. – д-р техн. наук, проф. ВНТУ;
Краевский В. А. – канд. техн. наук, доц. ВНТУ.

ВНТУ – Винницкий национальный технический университет, г. Винница.

E-mail: vkraevsky@mail.ru